Drôles 2 maths !

S2

2018

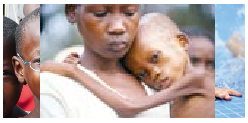
17ème édition

DROLES DE MATHS !

le concours de mathématiques des collégiens,
ludique et solidaire

CORRIGE 4ème - 3ème

au profit des enfants défavorisés



ACTION SCOLI'DAIRE

1 à 5 réponses correctes par question BAREME		CALCULATRICE INTERDITE
Crédit :	120 pts	OUTILS DE GEOMETRIE AUTORISES
Proposition correcte cochée :	+3 pts	
Proposition erronée cochée :	-2 pts	

EURO SPACE CENTER

EDITIONS DROLES DE...

MATH' CLIC

(C) Drôles de Maths - 19 rue de la Villette - 69003 Lyon
Email : contact@drolesdemaths.org // www.drolesdemaths.org

Question n°1

On m'a dit que tu en connais un rayon en géométrie. Non ? Bon, et bien tu es déjà monté(e) sur un vélo ?
Alors, combien peut-on tracer de rayons dans un cercle ?

A 360€ | B Plusieurs | C Un guidon
D Une infinité | E πkg

Un rayon est un segment allant du centre du cercle à un point du cercle. Comme il y a une infinité de points différents sur le cercle, il y a une infinité de rayons.

Un cercle possède une infinité de rayons, donc plusieurs.

Question n°2

Au large de Fukushima, deux crevettes se gavent de plancton radioactif. La masse de Sushi mesure 600kg et celle de Sudoku le tiers de celle de Sushi.
Quelle est la masse de Sudoku ?

A Moins de 600kg | B Plus de 600kg | C 200kg
D 800kg | E 1 000kg

La masse de Sudoku mesure un tiers de celle de Sushi, donc moins que celle de Sushi qui vaut 600kg.

La masse de Sudoku vaut :

$$\frac{1}{3} \times 600 = \frac{\cancel{3} \times 200}{\cancel{3}} = 200\text{kg}$$

La masse de Sudoku mesure moins de 600kg, 200kg exactement.

Question n°3

Dans la famille Citrouille, ils ont tous pris la grosse tête. Chaque nombre vaut 10 fois la somme de ses chiffres.

Qui fait partie de la famille Citrouille ?

A 1

B 10

C 20

D 50

E 100

Calculons, pour chaque nombre proposé, la somme de ses chiffres multipliée par 10.

Pour 1 : 1 x 10 = 10 ≠ 1

Pour 10 : (1 + 0) x 10 = 10

Pour 20 : (2 + 0) x 10 = 2 x 10 = 20

Pour 50 : (5 + 0) x 10 = 5 x 10 = 50

Pour 100 : (1 + 0 + 0) x 10 = 1 x 10 = 10 ≠ 100

Les nombres appartenant à la famille Citrouille sont 10, 20 et 50.

Question n°4

C'est Noël, Mamie coupe la bûche. Elle saisit sa hache et frappe à 2 reprises. A chaque coup, 23% de la bûche est pulvérisée. Malgré tout, il reste 3 tronçons de bûche de même longueur.

Quelle est la longueur d'un tronçon par rapport à celle de la bûche ?

A Moins de 20%

B Plus de 20%

C 16%

D 18%

E 33,33%

Il faut 2 coups de hache pour partager la bûche en 3 tronçons.
Ces 2 coups de hache pulvérisent 2x23=46% de la bûche.
Les 3 tronçons constituent donc 100-46=54% de la bûche.

Si chaque tronçon représentait 20% ou plus de la totalité de la bûche, les trois tronçons représenteraient en tout 3x20=60% ou plus de la bûche. Ce n'est pas possible puisqu'après les deux coups de hache, il ne reste plus que 54% de la bûche.
Par conséquent, la longueur d'un tronçon représente moins de 20% de la bûche.

Cette longueur représente exactement 54/3=18% de la bûche.

La longueur d'un tronçon représente moins de 20% de la longueur de la bûche, 18% exactement.

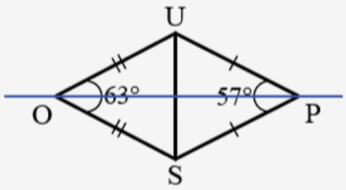
Question n°5

Ah, ils sont quand même drôlement tordus à Drôles de Maths, ils ont fait exprès de froisser le papier pour que l'on ne puisse pas mesurer !

Que peut-on affirmer ?

- A OS = 0U
- B SU = SP
- C SO > SP
- D SO + SP
- E SO < SP

Le schéma indique que OS = OU, le triangle UOS est isocèle en O.



Comme UP = SP, UPS est un triangle isocèle en P.
Si SU était égal à SP, UPS serait un triangle équilatéral et tous ses angles mesureraient 60°. Or, ce n'est pas le cas, l'angle en P mesure 57°. Par conséquent : SU ≠ SP.

Que peut-on dire de SO et SP ?
O est à une même distance des points S et U. C'est le cas aussi pour P. Par conséquent, O et P sont tous les deux sur la médiatrice du segment [SU]. On conçoit intuitivement que plus un point sur la médiatrice est loin du segment [SU], plus il voit ce segment sous un angle petit. C'est le point P qui voit le segment sous le plus petit angle (57°). C'est donc lui le plus éloigné du segment [SU].

On peut affirmer que SU = SP et SO < SP.

Question n°6

Tu connais les nombres premiers ? Exceptionnels, toujours prêts à rendre service ! En les multipliant entre eux, on construit tous les autres nombres entiers. On les reconnaît au fait qu'ils ne sont divisibles que par 1 et eux-mêmes (comme 7=1x7).
Quels sont les nombres premiers ?

- A 13
- B 34
- C 35
- D 36
- E 37

13 est premier, il n'a d'autres diviseurs que 1 et lui-même : 13 = 1 x 13
34 n'est pas premier car il est divisible par 2 : 34 = 2 x 17
35 n'est pas premier car il est divisible par 5 : 35 = 5 x 7
36 n'est pas premier car il est divisible par 2 : 36 = 2 x 18
37 est premier, il n'a d'autres diviseurs que 1 et lui-même : 37 = 1 x 37

Les nombres premiers sont 13 et 37.

Question n°7

Ecoute-moi bien, petit vermicelle, cette expression, là, $\left(a^2-4\right)(a+1)+1$, crois-moi, elle est finie, elle ne vaut presque plus rien !

Quelles valeurs du nombre *a* rendent cette expression égale à 1 ?

- A -2
- B -1
- C 0
- D 1
- E 2

Pour que $\left(a^2-4\right)(a+1)+1$ vaille 1, il faut que $\left(a^2-4\right)(a+1)$ vaille 0.
$\left(a^2-4\right)(a+1)$ est le produit des deux facteurs : $\left(a^2-4\right)$ et $(a+1)$.

Avec *a* = -2, le premier facteur vaut :

$$\left(a^2-4\right)=(-2)^2-4=4-4=0$$

Le premier facteur étant nul, le produit $\left(a^2-4\right)(a+1)$ est également nul.

Avec *a* = -1, le deuxième facteur vaut :

$$(a+1)=(-1+1)=0$$

Le deuxième facteur étant nul, le produit $\left(a^2-4\right)(a+1)$ est également nul.

Avec *a* = 0, le premier facteur vaut :

$$\left(a^2-4\right)=0^2-4=0-4=-4$$

et le deuxième facteur vaut :

$$(a+1)=(0+1)=1$$

le produit valant donc : $\left(a^2-4\right)(a+1)=-4\times 1=-4\neq 0$.

Avec *a* = 1, le premier facteur vaut :

$$\left(a^2-4\right)=1^2-4=1-4=-3$$

et le deuxième facteur vaut :

$$(a+1)=(1+1)=2$$

le produit valant donc : $\left(a^2-4\right)(a+1)=-3\times 2=-6\neq 0$.

Avec *a* = 2, le premier facteur vaut :

$$\left(a^2-4\right)=(2)^2-4=4-4=0$$

Le premier facteur étant nul, le produit $\left(a^2-4\right)(a+1)$ est également nul.

L'expression $\left(a^2-4\right)(a+1)+1$ est égale à 1 pour *a* égal -2, -1 ou 2.

Question n°8

Sur le cube démoniaque ci-contre, chaque face peut pivoter dans un sens ou dans l'autre.
Quelle(s) séquence(s) de rotation(s) amène(nt) l'élément marqué d'une croix à la place de l'élément marqué d'un cercle ?

- A H
- B HHH
- C AdP
- D agp
- E HAAdd

Quatre séquences de rotation conviennent : HHH, AdP, agp et HAAdd.

Question n°9

Tiens, revoilà Sushi. Elle a encore forcé sur le plancton. Elle gobe avec Kimono, dont la masse mesure les deux tiers de celle de Sushi. La masse totale des deux crevettes mesure 1 500kg.

Quelle est la nouvelle masse de Sushi ?

- A Moins de 750kg
- B Plus de 750kg
- C 800kg
- D 900kg
- E 1 000kg

La masse de Kimono vaut moins que celle de Sushi, les deux tiers. Par conséquent, la masse de Sushi vaut plus que la moitié de 1 500kg, la masse totale des deux crevettes, c'est-à-dire plus de 750kg.

Solution 1

Si on raisonne en termes de « tiers de Sushi », Sushi représente 3 tiers et Kimono 2 tiers.
On a donc 3+2=5 tiers pour une masse de 1 500kg.
La masse d'un tiers de Sushi mesure donc :

$$\frac{1\ 500}{5} = \frac{\cancel{5} \times 300}{\cancel{5}} = 300\text{kg}$$

Et finalement, la masse de Sushi mesure 3 tiers de sushi, soit :

3 x 300 = 900kg

Solution 2

Appelons *s* la masse de Sushi en kg.
La masse de Kimono mesure alors, en kg : $\frac{2s}{3}$

Puisque la masse totale des deux crevettes mesure 1 500kg, on a :

$$\begin{aligned} & s + \frac{2}{3}s = 1\ 500 \\ \text{d'où} \quad & \frac{3s}{3} + \frac{2s}{3} = 1\ 500 \\ \text{d'où} \quad & \frac{3s + 2s}{3} = 1\ 500 \\ \text{d'où} \quad & \frac{5s}{3} = 1\ 500 \\ \text{d'où} \quad & 5s = 1\ 500 \times 3 \\ \text{d'où} \quad & s = \frac{\cancel{5} \times 300 \times 3}{\cancel{5}} \\ \text{d'où} \quad & s = 900 \end{aligned}$$

La masse de Sushi mesure plus de 750kg, 900kg exactement.

Question n°10

Bon, alors le mot « dix » s'écrit bien avec 3 lettres, pas 10, on est bien d'accord ? Allez, fait un effort, concentre-toi !

Combien de nombres entiers ont pour valeur le nombre de lettres de leur écriture en toutes lettres ?

A 0   B 1   C 2

D 3   E 4

On a :

0 : zéro — 4 lettres $\neq 0$
1 : un — 2 lettres $\neq 1$
2 : deux — 4 lettres $\neq 2$
3 : trois — 4 lettres $\neq 3$
4 : quatre — 5 lettres $\neq 4$
5 : cinq — 4 lettres $\neq 5$
6 : six — 3 lettres $\neq 6$
7 : sept — 4 lettres $\neq 7$
8 : huit — 4 lettres $\neq 8$
9 : neuf — 4 lettres $\neq 9$
10 : dix — 3 lettres $\neq 10$
11 : onze — 4 lettres $\neq 11$
12 : douze — 5 lettres $\neq 12$
Etc.

En français, aucun nombre n'a pour valeur le nombre de lettres de son écriture en toutes lettres.

En anglais, on a le nombre four (4), qui s'écrit avec 4 lettres, en allemand, le nombre vier (4), qui s'écrit également avec 4 lettres, en espagnol cinco (5), qui s'écrit avec 5 lettres, et en italien tre (3) qui s'écrit avec 3 lettres.

Question n°11

Une équipe de bras-cassés postule à Danse avec les nombres. Parmi eux figurent tous les nombres entiers naturels à deux chiffres dont le chiffre des dizaines est strictement inférieur à celui des unités.

Combien sont ces nombres ?

A 30
B 32
C 33
D 35
E 36

On compte les nombres dont le chiffre des dizaines est strictement inférieur à celui des unités, avec un peu de méthode, afin de ne pas en oublier et de ne pas avoir de doublons.

8 de ces nombres commencent par **1** : **1**2, **1**3, **1**4, **1**5, **1**6, **1**7, **1**8, **1**9
7 de ces nombres commencent par **2** : 23, 24, **2**5, **2**6, **2**7, **2**8, **2**9
…
1 de ces nombres commence par **8** : **8**9
Et aucun de ces nombres ne commence par : 9.

Au total, les nombres qui conviennent sont :

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36.$

Ces nombres sont 36.

Question n°12

a, son problème, c'est qu'il fait trop le canard. Ce matin, il se fait contrôler pour insolence.
La police des nombres lui demande son identité, il répond : $\frac{3}{6} < \frac{a}{12} < \frac{5}{6}$. Incorrigible !

Que peut valoir *a* ?

- A 4
- B 5
- C 6
- D 7
- E 8

Solution 1

Pour comparer facilement ces fractions, on peut les réduire au même dénominateur.

$\frac{3}{6}$ peut s'écrire : $\frac{3\times\mathbf{2}}{6\times\mathbf{2}} = \frac{6}{12}$

$\frac{5}{6}$ peut s'écrire : $\frac{5\times\mathbf{2}}{6\times\mathbf{2}} = \frac{10}{12}$

L'inégalité $\frac{3}{6} < \frac{a}{12} < \frac{5}{6}$ peut donc s'écrire également $\frac{6}{12} < \frac{a}{12} < \frac{10}{12}$.
Or, des fractions ayant le même dénominateur sont rangées dans le même ordre que leurs numérateurs.
Donc, pour que l'inégalité soit vraie, il faut que $6 < a < 10$.

Parmi les valeurs proposées, seules 7 et 8 conviennent.

L'inégalité $\frac{3}{6} < \frac{a}{12} < \frac{5}{6}$ est vraie pour $a = 7$ ou $a = 8$.

Question n°13

Perché sur sa planète, Urgol t'observe. Et il se marre ! La longueur d'un rayon de sa planète dépasse de 60% la longueur d'un rayon de la Terre.
De quel pourcentage un grand cercle autour de sa planète est-il plus long qu'un grand cercle autour de la Terre ? (on donne : $P = 2\pi r$)

A 40% B 60% C $\pi\%$

D $2\pi\%$ E 120%

Solution 1

Considérons un cercle de rayon *r* et de périmètre *P*.
On a :

$$P = 2\pi r$$

Cette égalité nous indique que pour obtenir le périmètre *P* d'un cercle quelconque, on multiplie son rayon *r* par un nombre constant (toujours le même), le nombre 2π. Cela revient à dire que le périmètre *P* d'un cercle est proportionnel à son rayon *r*.
Par conséquent, si on augmente le rayon *r* d'un cercle de 60%, son périmètre augmentera proportionnellement (dans les mêmes proportions), c'est-à-dire de 60% également.

Solution 2

Appelons R et $P = 2\pi R$ le rayon et le périmètre d'un grand cercle autour de la planète d'Urgol, et r et $p = 2\pi r$ le rayon et le périmètre d'un grand cercle autour de la Terre.
L'énoncé indique que *R* est 60% plus grand que *r*, ce qui s'écrit :

$$R = r + \frac{60}{100}r = \left(1 + \frac{60}{100}\right)r$$

On en déduit :

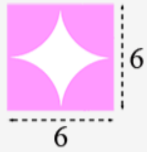
$$P = 2\pi R = 2\pi\left(1 + \frac{60}{100}\right)r = \left(1 + \frac{60}{100}\right) \times 2\pi r = \left(1 + \frac{60}{100}\right)p = p + \frac{60}{100}p$$

Ce qui prouve que le périmètre d'un grand cercle autour de la planète d'Urgol est 60% plus oing que le périmètre d'un grand cercle autour de la Terre.

Un grand cercle autour de la planète d'Urgol est 60% plus long qu'un grand cercle autour de la Terre.

Question n°14

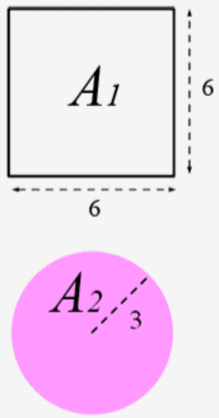
Salut, je suis l'as de carreau. On vient de me relooker. Tu sens la grâce de la courbe, l'audace de la pointe, l'harmonie de la symétrie ? Bon, ça suffit, redescends sur Terre.



Quelle est l'aire de la partie blanche ? ***(aire d'un disque de rayon r :*** $A = \pi r^2$***)***

- A $16 - 12\pi$
- **B** $9(4 - \pi)$
- C $24\pi - 36$
- D $36 - 12\pi$
- **E** $36 - 9\pi$

L'aire A de la zone blanche est égale à l'aire A_1 du carré, diminuée de l'aire A_2 de la zone rose.



L'aire A_1 du carré est :

$$A_1 = 6 \times 6 = 36\mathrm{m}^2$$

La zone rose est constituée des quatre quarts d'un même disque, de diamètre 6 et donc de rayon 3. Son aire totale est celle du disque entier, soit :

$$A_2 = \pi \times 3^2 = 9\pi\mathrm{m}^2$$

Et finalement, on obtient :

$$A = A_1 - A_2 = 36 - 9\pi\mathrm{m}^2$$

L'aire de la zone hachurée mesure $36 - 9\pi\mathrm{m}^2$, ce qui peut s'écrire également $9(4 - \pi)\mathrm{m}^2$.

Question n°15

Cinq nombres entiers impairs consécutifs (qui se suivent) sont victimes de la fonction *h*, la fonction *h*allucinogène. Ils ne savent plus qui ils sont, tout juste se souviennent-ils que leur somme vaut 125.

Qui fait partie de ces cinq nombres ?

- A 17
- B 19
- **C** 23
- **D** 29
- E 31

Solution 1

Si ces nombres étaient 1, 3, 5, 7 et 9, les cinq premiers entiers positifs impairs consécutifs, leur somme serait 25.

On veut que cette somme augmente de 100.
Or, chaque fois que l'on décale la suite 1, 3, 5, 7, 9 de 2 rangs (on ajoute 2 à chaque membre de la suite), la somme des 5 nombres augmente de 2+2+2+2+2 = 10.

Donc pour augmenter la somme de 100 et parvenir à 125, il faut décaler de 10 fois 2 rangs, donc de 20 rangs.
On obtient alors :

21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125

Solution 2

Appelons *n* le plus petit de ces nombres impairs.
Ses successeurs **impairs** sont *n*+2, *n*+4, *n*+6 et *n*+8.
Comme la somme totale vaut 125, on doit avoir :

$$\begin{aligned} n+(n+2)+(n+4)+(n+6)+(n+8) &= 125 \\ \text{d'où } n+n+n+n+n+2+4+6+8 &= 125 \\ \text{d'où } 5n+20 &= 125 \\ \text{d'où } 5n &= 125-20 \\ \text{d'où } n &= \frac{105}{5} \\ \text{d'où } n &= \frac{\cancel{5}\times 21}{\cancel{5}} \\ \text{d'où } n &= 21 \end{aligned}$$

Le plus petit des nombres est 21 et ses successeurs impairs sont 23, 25, 27 et 29.

On vérifie que :

21+23+25+27+29 = 125

23 et 29 font partie de ces cinq nombres.

Question n°16

Marie-Distraite De la Cervellette doit faire l'addition suivante : 931 + 431 + 679 + 789 + 701 + 927 + 121. Le total devrait être 4 579 mais elle trouve 4 381 car dans son addition, elle a bugué, elle a écrit l'un des nombres à l'envers.
Lequel ?

- A 931
- B 679
- C 431
- D 927
- E 701

En écrivant à l'envers un des nombres, la somme diminue de :

$$6\ 867 - 6\ 669 = 6\ 867 - 6\ 667 - 2 = 200 - 2 = 198$$

Solution 1

On cherche donc parmi les nombres proposés celui qui est supérieur de 198 au nombre que l'on obtient en inversant ses chiffres.
Le seul nombre possible est 927.
En effet, on a bien :

927 - 729 = 198

Solution 2

Alix trouve donc un total inférieur de 198 à ce qu'il devrait être.

$1^{\text{ère}}$ remarque : le retournement d'un nombre ne fait pas intervenir le chiffre du milieu ; on n'a donc pas à tenir compte de ce chiffre.

$2^{\text{ème}}$ remarque : la permutation des 1^{er} et $3^{\text{ème}}$ chiffres augmente le nombre si le 1^{er} chiffre de départ est inférieur au $3^{\text{ème}}$; elle le diminue dans le cas contraire.

Comme le total obtenu par Marie-Distraite est inférieur à ce qu'il devrait être, c'est qu'elle a renversé un nombre dont le 1^{er} chiffre est supérieur au $3^{\text{ème}}$, donc les candidats possibles sont : 431, 701 et 927.

Renverser 431 en 134 diminue le total d'environ 400-100, soit de 300.
Renverser 701 en 107 diminue le total environ 700 – 100, soit 600.
Enfin, renverser 927 en 729 diminue le total d'environ 900 – 700, soit 200.
On constate que 927 reste le seul candidat possible.
On vérifie que :

927 - 729 = 198

Le nombre écrit à l'envers est 927.

Question n°17

Gigi est dresseuse de croque-monsieur. En général, elle les place en carré, mais aujourd'hui, il lui en manque 13 pour faire un carré. En revanche, elle peut en faire un en en enlevant 6.

Le nombre de croque-monsieur dont elle dispose est :

- A 19
- B inférieur à 100
- C pair
- D multiple de 3
- E le double d'un carré

Solution 1

Appelons *q* le nombre de croque-monsieur recherché.
q + 13 et *q* - 6 doivent être des carrés. La différence entre ces deux carrés est :
$q + 13 - (q - 6) = q + 13 - q + 6 = \underline{q - q} + 13 + 6 = 19.$

On peut de manière empirique rechercher « à la main » deux carrés dont la différence est 19.

Les premiers carrés sont :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
		+1	*+3*	*+5*	*+7*	*+9*	*+11*	*+13*	*+15*	*+17*	*+19*	*+21*	*+23*

Bingo, on a :

$$100 - 81 = 10^2 - 9^2 = 19$$

On a trouvé deux carrés dont la différence est 19.

q + 13 = 100 donne alors :

q = 100 - 13 = 87

De même q - 6 = 81 donne également :

q = 81 + 6 = 87

Ainsi, le nombre de croque-monsieur possédé par Gigi peut être 87, un multiple de 3, inférieur à 100.

Mais y a-t-il d'autres valeurs possibles pour *q* ?

Solution 2 *(fin de collège)*

Rappelons tout d'abord que le nombre de croque-monsieur dans un carré de côté *n* croque-monsieur est égal à $n \times n = n^2$.

Appelons *q* le nombre de croque-monsieur recherché.
Avec q + 13 quilles, Gigi pourrait faire un carré. Il existe donc un entier positif *a* tel que : $q + 13 = a^2$.
Avec q - 6 quilles, Gigi pourrait également constituer un carré. Il existe donc un entier positif *b* tel que : $q - 6 = b^2$.

Prenons la première égalité, et enlevons à chaque membre la quantité q - 6, ou plutôt enlevons q - 6 au membre de gauche et b^2 au membre de droite puisque les deux quantités sont égales.
On obtient alors :

$$\begin{aligned} q + 13 - (q - 6) &= a^2 - b^2 \\ q + 13 - q + 6 &= a^2 - b^2 \\ 19 &= a^2 - b^2 \\ 19 &= (a + b)(a - b) \end{aligned}$$

Or, la seule manière de décomposer 19 en un produit de facteurs entiers est : 19 = 19 x 1
Ce qui mène à :

$$\begin{cases} a + b &= 19 \\ a - b &= 1 \end{cases}$$

En ajoutant ces deux égalités comme on l'a fait précédemment, on obtient :

$$a + b + (a - b) = 19 + 1$$

Question n°18

Une population de 100 individus est composée de gnoks et de gnaks. Il y a 3 fois moins de gnoks que de gnaks. 12% de la population aime la tête de bouk. Il y a 3 fois plus de gnoks que de gnaks qui aiment la tête de bouk.
Quelle proportion de gnaks aime la tête de bouk ?

A 23

B 25

C $\frac{3}{75}$

D $\frac{25}{75}$

E 4

La population comporte 100 individus.

D'après l'énoncé, il y a 3 fois moins de gnoks que de gnaks.
C'est donc que pour 1 gnok, il y a 3 gnaks, pour 4 individus en tout, les gnoks représentant ainsi un quart de l'effectif.
Par conséquent, pour l'ensemble des 100 habitants, on a $\frac{1}{4} \times 100 = \frac{100}{4} = 25$ gnoks et le reste, $100 - 25 = 75$ gnaks.

D'après l'énoncé, 12% de la population aime la tête de bouk.
Donc pour 100 habitants, il y en a 12 qui aiment la tête de bouk.

Toujours d'après l'énoncé, il y a 3 fois plus de gnoks que de gnaks qui aiment la tête de bouk. Donc pour 3 gnoks qui aiment la tête de bouk, il y a 1 gnak qui aime la tête de bouk, pour 4 individus en tout qui aiment la tête de bouk.
On en déduit que parmi ceux qui aiment la tête de bouk, il y en a $\frac{3}{4} \times 12 = \frac{3}{\cancel{4}} \times 3 \times \cancel{4} = 9$ chez les gnoks et le reste,
12 - 9 = 3 chez les gnaks.

Finalement, 3 gnaks sur 75 aiment la tête de bouk.
Or on a :

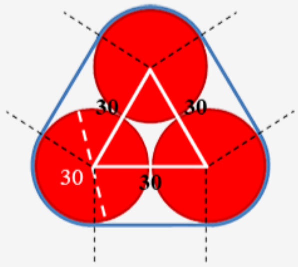
$$\frac{3}{75} = \frac{\cancel{3} \times 1}{\cancel{3} \times 25} = \frac{1 \times \mathbf{4}}{25 \times \mathbf{4}} = \frac{4}{100}$$

La proportion de gnaks aimant la tête de bouk est donc $\frac{3}{75}$, ou encore 4%.

Question n°19

Dynamitor se sent raplapla ce matin. Pour se remettre en forme, il se prépare un sandwich à la dynamite.
Sur le schéma ci-contre, quelle est la longueur du cordon bleu, à 1 près ?

A 158 | B 184 | C 132
D 128 | E 192



Solution 1

Soit C la longueur du cordon rouge et d=30 le diamètre de chaque bâton de dynamite.

La longueur de chaque partie rectiligne du cordon est égale à la distance séparant les centres de deux bâtons de dynamite, soit d. Ce qui donne, pour l'ensemble des 3 parties rectilignes du cordon, une longueur :
$L = 3d = 3 \times 30 = 90.$

Concernant les parties courbes, imaginons que l'on réduise petit à petit les dimensions du triangle équilatéral central, en le gardant équilatéral, et sans déformer les disques rouges. Les parties rectilignes se réduisent peu à peu pour devenir de longueur nulle au moment où les trois disques rouges se superposent. Les trois contours courbes, dont les longueurs n'ont pas changé, forment alors un cercle unique de diamètre d et de périmètre $P = \pi \times d = 30\pi$.

On a finalement :

$$C = L + P$$

soit

$$C = 90 + 30\pi \qquad C \simeq 90 + 30 \times 3,14$$
$$C \simeq 90 + 10 \times \underline{3 \times 3,14}$$
$$C \simeq 90 + 10 \times 9,42$$
$$C \simeq 90 + 94,2$$
$$C \simeq 184,2$$
$$C \simeq 184$$

Le cordon bleu mesure 184, à 1 près.

Question n°20

Un nombre entier n, impair, est condamné à une lourde peine pour pratique illégale de la numérologie : on lui enlève son inverse, puis, on multiplie le résultat par n, puis par (n^2+1).
Le résultat final est :

- A pair
- B impair
- C multiple de *n*
- D multiple de *n-1*
- E multiple de *n*+1

D'après l'énoncé, le résultat final est :

$$\left(n-\frac{1}{n}\right)\times n\times\left(n^2+1\right)=\left(n^2-1\right)\left(n^2+1\right)$$

Solution 1

A ce stade, si on connaît la formule $a^2-1=(a-1)(a+1)$, on obtient :

$$\underline{\left(n^2-1\right)}\left(n^2+1\right)=\underline{(n-1)(n+1)}\left(n^2+1\right)$$

Ce nombre est manifestement un multiple de *n*+1 et de *n*-1, mais pas de *n*.
Par ailleurs, comme *n* est impair, *n*+1 est pair et le produit $(n-1)(n+1)\left(n^2+1\right)$ est donc aussi pair.

Solution 2

Si on ne connaît pas la formule $a^2-1=(a-1)(a+1)$, on continue en distribuant par exemple le premier facteur.
On obtient :

$$\begin{aligned}\underline{\left(n^2-1\right)}\left(n^2+1\right)&=\underline{\left(n^2-1\right)}\times n^2+\underline{\left(n^2-1\right)}\times 1\\&=n^2\times n^2-1\times n^2+\left(n^2-1\right)\\&=\left(n^2\right)^2-n^2+n^2-1\\&=\left(n^2\right)^2-1\end{aligned}$$

On a donc établi que :

$$\left(n^2\right)^2-1=\left(n^2-1\right)\left(n^2+1\right)$$

Si on renomme dans cette formule n^2 par *a*, on obtient justement la formule qu'il nous manquait : $a^2-1=(a-1)(a+1)$.
Du coup, $\left(n^2-1\right)\left(n^2+1\right)$peut s'écrire :

$$\underline{\left(n^2-1\right)}\left(n^2+1\right)=\underline{(n-1)(n+1)}\left(n^2+1\right)$$

Les conclusions sont les mêmes que pour la solution 1.

Le résultat final est pair, multiple de *n*-1 et de *n*+1.